

3. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Sommer 2024

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 3.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < 1 < a$.

Zeigen Sie:

- 1) $1 < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$
- 2) $1 > b > b^2 > b^3 > b^4 > \dots$
- 3) $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots > 1$
- 4) $b < \sqrt{b} < \sqrt[3]{b} < \sqrt[4]{b} < \dots < 1$

Aufgabe 3.2 Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

Aufgabe 3.3 Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in \mathbb{R} .

Zeigen Sie:

- 1) Konvergiert $(a_n)_n$ und gilt $a_n = b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch $(b_n)_n$ und es gilt $\lim a_n = \lim b_n$.
- 2) Konvergiert $(a_n)_n$ gegen $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(|a_n|)_n$ gegen $|a|$.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie anhand der Konvergenzdefinition:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n+5} = 1$$